

Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit

Wir betrachten lineare, zeitinvariante System mit Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{1}$$

Aus der Vorlesung Regelungstechnik I sind die folgenden Definitionen bekannt.

Definition 1 (Steuerbarkeit)

Ein lineares zeitinvariantes System heißt steuerbar, wenn eine Steuerfunktion $u(t)$ existiert, die das System aus jedem beliebigen Anfangszustand in beliebiger Zeit in jeden beliebigen Endzustand überführt.

Definition 2 (Beobachtbarkeit)

Ein System heißt beobachtbar, wenn der Zustand $\mathbf{x}$ zu einem Zeitpunkt aus dem Zeitverlauf der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ und des Eingangssignals $\mathbf{u}(t)$ für Zeiten kleiner als t berechnet werden kann.

Aus der Vorlesung Regelungstechnik I sind folgende Kriterien für Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit von SISO- und MIMO-Systemen bekannt (wobei n die Dimension des Zustandsraumes ist):

$$\text{Beobachtbarkeit} \Leftrightarrow \text{rg}(\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, \mathbf{A}^{(n-1)T} \mathbf{C}^T) = n \tag{2}$$

$$\text{Steuerbarkeit} \Leftrightarrow \text{rg}(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n. \tag{3}$$

Diese Tests sagen jedoch nur aus, ob ein System steuerbar und/oder beobachtbar ist oder nicht.

Wir betrachten hier eine alternative Charakterisierung von Beobachtbarkeit mit Hilfe der Moden des Systems. Die Moden

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{v}_k e^{\lambda_k t} \tag{4}$$

ergeben sich aus der Eigenwertgleichung des Systems:

$$(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung des autonomen Systems setzt sich aus einer Linearkombination der Moden zusammen.

Wir betrachten das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Transformation mit der Modalmatrix $\mathbf{T}$ auf Diagonalform ergibt:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{6}$$

Dabei bilden die Rechtseigenvektoren $\mathbf{v}_i$ bzw. die Linkseigenvektoren $\mathbf{w}_i^T$ die gesuchte Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Bei Λ handelt es sich um eine Diagonalmatrix (wir setzen der einfacheren Darstellung wegen voraus, daß keine mehrfachen Pole/Eigenwerte auftreten). Die Lösung des transformierten Systems berechnet sich leicht zu

$$\mathbf{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} \mathbf{z}_0. \quad (8)$$

Die Rücktransformation ergibt

$$\mathbf{x}(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} \mathbf{x}_0 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_0. \quad (9)$$

Mittels der Summenschreibweise sieht man sofort, daß die Lösung eine Linearkombination der Moden ist:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}}_{\text{Mode}} \underbrace{(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}_0)}_{\text{Skalar}}. \quad (10)$$

Ist ein Mode am Ausgang nicht „sichtbar“, so gilt mit $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$

$$C\mathbf{v}_k e^{\lambda_k t} = 0 \quad (11)$$

woraus sich durch Division mit $e^{\lambda_k t} \neq 0$

$$C\mathbf{v}_k = 0 \quad (12)$$

ergibt. Aus Gleichung (5) und (12) ergibt sich also als Bedingung, daß ein Mode nicht beobachtbar ist:

$$\begin{bmatrix} \lambda_k I - A \\ C \end{bmatrix} \mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow (\lambda_k, \mathbf{v}_k) \text{ ist Mode} \\ \longleftarrow \text{Mode ist nicht beobachtbar.} \end{array} \quad (13)$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist der entsprechende Mode nicht beobachtbar. Daraus folgt als alternatives Kriterium für Beobachtbarkeit der sogenannte *Hautus-Test*:

Satz 1 (Hautus-Test für Beobachtbarkeit)

Das Paar $\{A, C\}$ mit der $n \times n$ -Dynamikmatrix A ist genau dann beobachtbar, wenn gilt

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda. \quad (14)$$

In analoger Weise kann man den Hautus-Test auf Steuerbarkeit plausibilisieren:

Satz 2 (Hautus-Test für Steuerbarkeit)

Das Paar $\{A, B\}$ ist genau dann steuerbar, wenn gilt

$$\text{rg}[\lambda I - A \mid B] = n \quad \forall \lambda. \quad (15)$$

Diese Sätze gelten auch für nicht diagonalisierbare Systeme.

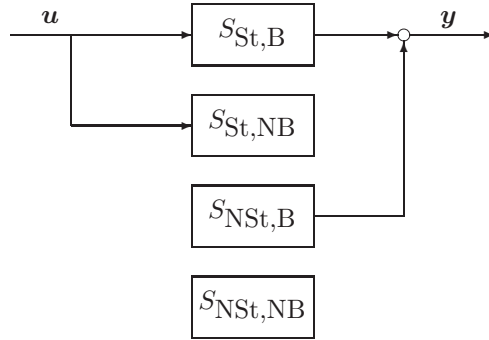


Abbildung 1: Aufspaltung eines Systems der Klasse B in ein steuerbares und beobachtbares Teilsystems ($S_{\text{St},B}$), ein steuerbares, aber nicht beobachtbares Teilsystem ($S_{\text{St},NB}$), ein nicht steuerbares, aber beobachtbares Teilsystems ($S_{\text{NSt},B}$), und ein nicht steuerbares und nicht beobachtbares Teilsystems ($S_{\text{NSt},NB}$) (Kalman Decomposition).

Beispiel 1

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10^8 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{u}\end{aligned}\tag{16}$$

Man sieht wegen der Diagonalgestalt sofort, daß das System nicht steuer- und nicht beobachtbar ist. Mit dem Hautus-Test erhält man folgendes Ergebnis.

$$\text{rg}[\lambda I - A \mid B] = \text{rg} \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda + 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = -2 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}.\tag{17}$$

D.h. der Mode $[0 \ 1]^T \cdot e^{-2t}$ ist nicht steuerbar. Die Feststellung, daß der zum Pol $s = -2$ gehörende Mode auch nicht beobachtbar ist, läßt sich leicht mit dem Hautus-Test auf Beobachtbarkeit zeigen.

Bemerkung 1

Für lineare Systeme hängt die Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit nicht von der Durchgriffsmatrix D ab.

Nicht steuerbar und/oder nicht beobachtbar sind also Moden des Systems, d.h. Systemteile. Folglich kann man sich die allgemeine Struktur eines Systems der Klasse B in der in Abbildung 1 dargestellten Weise vorstellen.

Was bedeutet dies für den Reglerentwurf? Für das Gesamtsystem ist sicher nur ein stabilisierender Regler zu finden, wenn das nichtsteuerbare Teilsystem selbst stabil ist. Andererseits können wir nichtbeobachtbare Moden, die instabil sind, nicht durch Regelung stabilisieren.

Definition 3 (Stabilisierbarkeit)

Ein System $\{A, B, C, D\}$ heißt stabilisierbar, wenn es eine Steuerfunktion $\mathbf{u}(t)$ gibt, die das System in den Nullzustand überführt (nicht unbedingt in endlicher Zeit).

Satz 3 (Stabilisierbarkeit)

Ein System ist genau dann stabilisierbar, wenn alle nicht steuerbaren Moden asymptotisch stabil sind.

Die Steuerbarkeit der einzelnen Moden lässt sich wie oben erklärt mit Hilfe des Hautus-Test überprüfen.

Satz 4 (Hautus-Test für Stabilisierbarkeit)

Das Paar $\{A, B\}$ ist genau dann stabilisierbar, wenn gilt

$$\text{rg}[\lambda I - A \mid B] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+. \quad (18)$$

Bemerkung 2

Da $\text{rg}[\lambda I - A] = n$ für alle λ , die nicht Eigenwert von A sind, genügt es die obige Bedingung für alle Eigenwerte von A mit positivem Realteil zu untersuchen.

In analoger Weise kann man den Begriff der *Entdeckbarkeit* einführen und folgenden Satz beweisen:

Satz 5 (Entdeckbarkeit)

Ein System ist genau dann entdeckbar, wenn alle nicht beobachtbaren Moden asymptotisch stabil sind.

Satz 6 (Hautus-Test für Entdeckbarkeit)

Das Paar $\{A, C\}$ mit der $n \times n$ -Dynamikmatrix A ist genau dann entdeckbar, wenn gilt

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+. \quad (19)$$

Zwischen dem Verlust von Beobachtbarkeit bzw. Steuerbarkeit und der Lage von Nullstellen bzw. Polen gibt es direkte Zusammenhänge. Auf diese werden in der Vorlesung Robust Control näher eingegangen.